

AF POUR LES ESPACES HOMOGÈNES.

$X/\mathbb{R}$ ESPACE HOMOGÈNE :

$$X(\mathbb{C}) \cong \frac{G(\mathbb{C})}{H(\mathbb{C})}$$

$H \subseteq G \subseteq GL_n(\mathbb{C})$
Sous-algèbre
ALGÈBRE

EX

$$G = GL_2$$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$G/H \cong \mathbb{P}^1$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \frac{a}{c} : \frac{b}{d}$$

SI G CONNEXE

THM

X SATISFAIT AF

1. TORSEURS ET THÉORÈME
DE DESCENTE

sur
un G
max
sur
 X

AF_X

APPROXIMATION FINE

RC_X

RATIONNELLEMENT CONNEXE

$X' \dots X$ AIR	$RC_x \subseteq RC_{x'}$	$AF_{x'} \subseteq AF_x$
$X = IP_{IR}^M$	$RC_x \stackrel{EST}{\subseteq} RA_1$	$AF_x \stackrel{EST}{\subseteq} \emptyset$
$X' \rightarrow X$ DOMINANT	START ARABER-HANDS $RC_x + RC_{x_{xx}}$ $\Downarrow$ $RC_{x'}$	$AF_x + AF_{x_{xx}}$ $\Downarrow$ $AF_{x'}$

$$AF_x \Rightarrow RC_x$$

CONJ : $RC_x \Rightarrow AF_x$

RMK

31 $X' \rightarrow X$ ALM, $RC_{x'} \Rightarrow RC_x$

QST $AF_{x'} \Rightarrow AF_x ?$

USEFUL:

$$\zeta_A^* \circ \zeta_A^* = \frac{z}{\bar{z}} = \langle \sigma \rangle$$

$$\sigma(z) := \frac{1}{\bar{z}}$$

$$q \rightarrow \zeta^* \rightarrow \zeta^* \times \zeta^* \rightarrow \zeta^* \rightarrow \mathbb{R}\text{-manifold}$$

$$(x, y) \mapsto \frac{x}{y}$$

$$\sigma(x, y) := (\bar{y}, \bar{x})$$

DIFFICULT:

$$x' \rightarrow x \quad x'(\mathbb{R}) = \emptyset$$

$$x(\mathbb{R}) \neq \emptyset$$



$$\{x^2 + y^2 + 1\} \subseteq \{x^2 + y^2 + 1 = 0\} \subseteq \mathbb{A}^2$$

$\frac{z}{\bar{z}}$ ANT
C(0,1)

$$\downarrow \cap \mathbb{A}^1 - \{0\} \subseteq \mathbb{A}^1$$

$$\frac{z}{\bar{z}}$$

$$\downarrow$$

$$y \mapsto y$$

$$\downarrow x$$

SE VAIS TROUVER L'ADICION:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\mathbb{R}[x, y, z]}{(x^2 + y^2 + 1, z^2 + 1)} \right) \begin{array}{l} \xrightarrow{z \mapsto -y} \\ \xrightarrow{z \mapsto -z} \end{array} \\ & \left(\frac{\mathbb{R}[x, y]}{(x^2 - \tilde{y}^2 + 1)} \right) \quad \left(\tilde{y} = yz \right) \quad \left(\begin{array}{l} \cancel{x^2 + y^2 + 1} \\ yz \end{array} \right) \\ & (yz)^2 = \tilde{y} \end{aligned}$$

$$\{x^2 - y^2 + 1 = 0\}(\mathbb{R})$$

$$x^2 - \tilde{y}^2 + 1 = 0 \quad \begin{array}{l} \xrightarrow{\tilde{y} = yz} \\ x^2 + 1 \end{array}$$

$$\downarrow$$

$$A^1 = \{9\}(\mathbb{R})$$

DEF $G/\mathbb{R}$ GROUPE SUR $\mathbb{R}$,

UN G -MODULE À GALUÛÉ

($\tilde{A}$ MOI) SUR X EST UNE
 VARIÉTÉ $Y \rightarrow X$ TEL QUE

- G AGIT SUR Y À GAUCHE ($\tilde{A}$ MOI)
- LOCALEMENT SUR $X(\mathbb{C})$ (POUR
 $Y(\mathbb{C}) \cong G^{\text{an}} \times X(\mathbb{C})$ TOPOLOGIE
 ANALYTIQUE
 COMPATIBLE
 AVEC L'ACTION.)

EX.

G_m -TORSORS $L \rightarrow X$
 FIBRÉS EN MOI. $\uparrow$
 $L \rightarrow X$

- $G = \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ $\{y^2 + x^2 + 1\}$ est une
 TORSOR SUR
 $\mathbb{A}_m$

RMR . $Y \cong G \times X \Leftrightarrow Y(X) \neq \emptyset$
 $X \rightarrow Y \rightarrow X$
 $\underbrace{\quad}_{\text{Id.}}$

$X \rightarrow Y$
 η
 $G \times X \xrightarrow{\sim} Y$
 $(g, x) \mapsto g \cdot \eta(x)$

EX $X = \{0, 1\}$ G -TENSOR $\text{SUR} \text{ } \delta^{\text{SUR}}_{\text{SUR}}$

ONE VARIABLE SUR $Q \text{ SUR}$

$Y \subseteq \{0, 1\}$, $Y \subseteq G \Rightarrow Y \subseteq \{0, 1\} \neq \emptyset$

EX $Y = \text{SPEC} \left(\frac{H_L(X)}{(X^2 + 1)} \right) \Big|_{E \subseteq \text{SUR}}$

$\frac{21}{22}$ - TENSOR $(X) \rightarrow 4$

TENSOR : $Y \rightarrow X$ G -TENSOR $\text{SUR} \text{ } X$ $\bar{A} \text{ SUR}$

Z G -TENSOR $\text{SUR} \text{ } \bar{A} \text{ SUR}$

COMMON OF

$Y \text{ SUR}$

Z

$$Z \text{ } Y := Z \times \frac{Y}{Z}$$

$$(z, y) \sim (z', y')$$

$$\exists y \in G(z \cdot y^{-1}, y \cdot z) = (z', y')$$

Ex $V: X^2 + Y^2 + 1 = 0$ TWIST P.A.

$z: \frac{R(x)}{(x^2+1)}$

$z^V: X^2 - Y^2 + 1 = 0$

LEMMA $\bigcup_{z \text{ G-TORSOR SUR } \mathbb{R}} (R \setminus \emptyset) \rightarrow X(R)$

PROOF $z \text{-TORSOR SUR } \mathbb{R}$
 z^{-1} TORSOR

$z: z \cdot g = g^{-1} z$

$z^{-1} z(R) \neq \emptyset \quad (z^{-1} z = \frac{z \times z}{2})$

$x \in X(R)$

$$\begin{array}{ccc} R_x & \rightarrow & V \\ \downarrow & & \downarrow G \\ G & \rightarrow & X \end{array}$$

$$z^{-1}z = \frac{z^{-1}xz}{z} \quad \sim: (x,y) \sim (x',y')$$

$\Rightarrow \varphi$

$$(x, y) \sim (\partial x, \partial y) = (x \cdot \partial^{-1}, \partial y)$$

$$Z(A) \xrightarrow{\Delta} Z \times_{\mathbb{R}} Z(A) \xrightarrow{\sim} Z \times_{\mathbb{R}} Z(A) = Z^{-1} Z(A)$$

$$m(\Delta) = 5.3 \quad \text{rate } (t/r) \text{ stabil.}$$

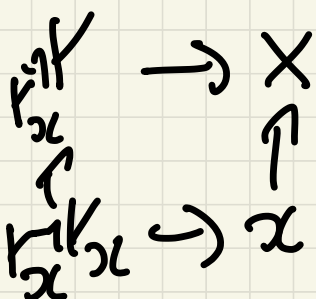
$$(x, x) \sim (gx, gx)$$

1.0.
 $s, z \in \mathbb{Z}^{-1} \mathbb{Z}(\mathbb{R})$.

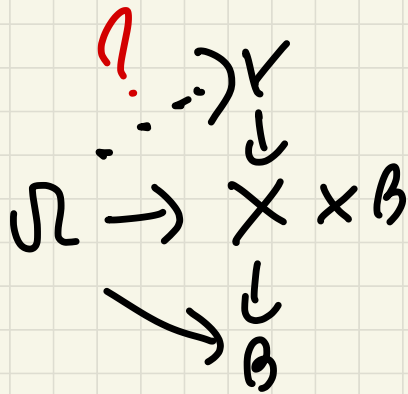
K_X is G-TORSION SUR IR

$\bar{A}$ SIMILAR

K_X^{-1} ESTIMATOR
A.M.M.



$$X \in M \left[\begin{array}{c} \uparrow \\ K_X \end{array} \right] \xrightarrow{(\text{IR})} X(\text{IR})$$



DOF $X \rightarrow B$

$$F = \Omega(B)$$

$G: F$ -GROUPS ALG & BNQ JO.

$$(G \rightarrow U \quad G \times_{\nu} G_m \rightarrow U)$$

$\exists$ G -TENSOR $\bar{A}$ WAVEHOSUR X_F
 $G \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $X_U \in X$ ET $Z_U(\phi) \approx G_X X(\phi)$
 $\downarrow$ $\downarrow$
 $V \in B$ $\underbrace{\text{LACALMME}}_{\text{SUR } X_U}$
 POUV CATOPHORE ANATHEUR.

OULX TENSOR $T^{t'}$ SONT COSMOMOS

$\exists$ $V \in \text{OUM}$

$V' \in V^{qB}$ POUV
 $T_{V'} \approx T'_{V'}$

EX TOUT k_m -TENSOR SURF
 SONT INVIAUX

LEMME: $\bigcup_z Y(A) \rightarrow X(A)$
 $\exists$ G -module sur F

THM (GALL) A gauche

si $Y \rightarrow X$ est G -monom et $\downarrow$ sur X

(AF est vrai pour tout $z \in Y$, pour
 $\exists$ G -TRANSFERS $\overset{\text{à gauche}}{\text{sur}}$ F ALORS

(AF est vrai pour X).

EX $LE \text{ PIC}(X)$ si AF est
 vrai pour $\downarrow$ $\overset{\text{sg}}{\text{ALORS}}$ est vrai pour X

II GROUPE ALGÈBRES.

THM': Si G EST GROUPE
ALGÈBRE ^{convexe} SUR F
ALORS AF EST VRAI:

- (a) G EST TMO
- (b) G EST UNIPOTENT
- (c) G EST NENUCTIVO _{convexe}
- (d) G EST CONVEXE

②

TONOS sur $F =$

ONQVDS ALKÈBNQVDS^G TOL

$PVDS \exists U' \rightarrow V$

$U' \times G$
SI

$U' \times k_m^m$

EX

$\mathbb{Q}' \times \mathbb{Q}' // R$
 $\curvearrowright$
 δ

$\mathbb{Q}' \hookrightarrow (z) = \frac{1}{z}$

AF EST UNQ POLA COS TONOS

CONSTRUCTION:

$$\begin{array}{ccc} U' & \xrightarrow{GAL} & U \\ \uparrow \pi_m^m & & \uparrow \pi \\ U' \times G_m^m & \rightarrow & G \end{array} \quad |$$

$$x_0 \dots x_m \quad GAL = \{ \pi(U'/U) \}$$

$$\tilde{G}_U = \prod_g G_{m,g}^m \rightarrow G_m^m$$

$$(x_{0,g} \dots x_{m,g}) \mapsto (g(x_0), \dots, g(x_m))$$

GAL - EQUIVARIANT.

$$a \rightarrow H \rightarrow \tilde{G} \rightarrow G \rightarrow a$$

- $\tilde{G}$ EST H-TORSOR SUR G

- $\tilde{G}$ EST MANIN (DONC ON A $AF_{\tilde{G}}$)

$$\prod_{\delta} k_m^n \subseteq \prod_{\delta} A^m \quad \text{APM} \rightarrow \mathbb{Q}$$

s1
A^mm

$$[L:K] =$$

$$\langle \lambda_1 \dots \lambda_m \rangle$$

1..

$$(x_{g_1}, \dots, x_{g_m})$$

↓

$$(\sum x_{g_i}, \dots, \sum x_{g_i})$$

$$W/A^1$$

$\delta_i \quad \delta_l$

$$\overline{Q \times Q \subseteq IA^1 \times IA^1}$$

$\subseteq IA^2$

$$\lambda x - \lambda y = \lambda x + y(\lambda) y$$

$$(\sum x_{g_i}, \sum g_i(\lambda_1) x_{g_i},$$

$$\sum g_i(\lambda_m) x_{g_i})$$

$$(x, y)$$

↓

$$(x+y, \lambda(x-y))$$

$$q \mapsto H \rightarrow \tilde{G} \rightarrow G \rightarrow \mathbb{A}$$

$$\searrow \downarrow \swarrow$$

$$B$$

$$T \quad \mathbb{H}\text{-transverse sur}$$

$$B$$

$$T \quad \tilde{G} \rightarrow G$$

$$\parallel$$

$$T \times_B G \times_G \tilde{G}$$

$$\sim$$

$$T \times_B G \quad \mathbb{H}\text{-transverse sur } G$$

$$\sim T \times_B \tilde{G}$$

$$\sim$$

$$(k, \cancel{h}, \tilde{g}) \sim (hk, \cancel{h}, h\tilde{g})$$

$$\tilde{G} \curvearrowright \text{sur } T \times_B \tilde{G} \quad g \cdot (t, \tilde{g})$$

$$ET \quad T \times_B \tilde{G}$$

$$\sim$$

$$E \hookrightarrow \tilde{G}\text{-transverse sur } B \quad (k, \tilde{g})$$

$$\uparrow$$

$$A \text{ DNIT}$$

$$\exists B' \rightarrow B$$

$$B' \times_B T \cong B' \times H$$

$$B' \times_B \left(\frac{X \times \tilde{Z}}{\sim} \right) \cong B' \times \frac{H \times \tilde{Z}}{\sim}$$

$$H \times_{\mathbb{K}} \tilde{G} \xrightarrow{m} \tilde{G} \quad h, g \mapsto hg$$

$$\tilde{h}(h, g) = (\tilde{h}h, \tilde{h}g^{-1}) \quad hg = h'g' \implies (h, g) = (h'g'^{-1}, g)$$

$$\text{FAIT (HILBERT - 90 + SHAPRON (norm))'}$$

$$T \tilde{K} \cong \tilde{K} \quad \text{sur } \emptyset$$

$$\left(H^1(F, \tilde{K}) = 0 \right)$$

$$\text{Ext}_F^1(Z', \tilde{K}) = \text{Ext}_F^1(X^*(\tilde{K}), Z')$$

HILBERT 90th

$$\text{Ext}_F^1(X^*(K_m) \otimes Z'(F_m))$$

$$0 \hookrightarrow H^1(F', K_m) = \text{Ext}_{F'}^1(X^*(K_m), Z')$$

$$\tau \tilde{h} \equiv \tilde{h} \text{ sur } \tilde{A} \quad \tau \tilde{h} \text{ A (AFI).}$$

PAR 103 MTS ON A AF_L .

② GROUPS UNIPOTENTS.

• G UNIPOTENT SI $\exists$

$$G \subseteq \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq U_m$$

sur U .

$$G\text{-UNIPOTENT} \Leftrightarrow \exists G_1 \triangleleft \dots \triangleleft G_m \triangleleft G$$

$$\text{TEL PUL } G_i / G_{i+1} \cong G_n$$

G_n est nilpotent.

PAR 105 CUM sur la 11ème F. 10/10.

$$0 \rightarrow \mathcal{H}' \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_n \rightarrow 0$$



ex

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{H}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{H}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\mathcal{H}}{\mathcal{H}_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\mathcal{H}_2}{\mathcal{H}_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\mathcal{H}}{\mathcal{H}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) $\mathcal{H}$ is a group iff:

$\mathcal{H}$ is a group

$R_n(\mathcal{H})$ is a group UNIPOTENT
MAXIMAL

$R_n(\mathcal{H}) \trianglelefteq \mathcal{H}$ (PAI MAXIMALITY)

$$E^* G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad R_n(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

DEF G INDUCTIF s/

$$R_n(G) = \{0\}$$

② G INDUCTIF COMPOSE

$X =$ VARIABLES
TERMS, MAXIMALS

$$\tilde{X} \subseteq X \times G$$

$$\{(\tau, \gamma) \mid \gamma \in \mathcal{F}\}$$

$$X \hookrightarrow \tilde{X} \xrightarrow{\pi_2} G$$

THM X EST MANIVELLO ET
 π_2 EST GRAMMABLE.

$$Y \# \Omega \supset \quad AF_G \Leftrightarrow AF_X$$

ET AF_X EST VRAI

$$\pi_2^{-1}(x) = ?$$

$$\{y \in G \mid y \in T\}$$

$$\parallel$$

$$\tilde{X} \rightarrow X \quad A$$

FINDS TONES. DONC.

$$F(\text{G/MON}) \vdash (\sim) \Rightarrow AF_{\tilde{X}}.$$

RMQ

$$\tilde{X} \rightarrow G \quad \text{BIMAT(ON)OZ.}$$

$$\pi_2^{-1}(y) = \{o\} \Leftrightarrow \exists! \text{ TONE MAXIMAL.}$$

pu canon y .

$$\begin{array}{c} \uparrow \uparrow \\ \overline{y} \end{array} \quad \text{EST}$$

THM 8.17 p.108 $\bar{y}$ ist ein TOW max. mal.
 kann produziert werden $\bar{y}$.

8X $k = kL_2$ TOW max. mal
 $\Leftrightarrow \text{rank } A = 2$

$$\text{Dim} \left(\overline{\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}} \right) \Leftrightarrow \begin{matrix} \langle x, y \rangle \subseteq k' \\ \text{si} \\ \mathbb{Z}/2 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$$

$$\langle x, -x \rangle = \mathbb{Z}.$$

. G - GROUPE COMMUTATIF.

$G/R_n(u)$ EST COMMUTATIF.

$$0 \rightarrow R_n(u) \hookrightarrow G \rightarrow G/R_n \rightarrow 0$$

$$G/R_n \text{ AF} + R_n(u) \text{ AF} \stackrel{\text{EXACTITUDE}}{\Rightarrow} G \text{ AF.}$$

III ESPACE HOM

X G -ESPACE HOMOGÈNE SUR F SI

$$\exists \theta' \rightarrow \theta \quad X' \cong \frac{G \times \theta'}{H} \quad H \subseteq G \times \theta' \text{ sous-groupe}$$

RMQ $X \cong G/H \Leftrightarrow X(B) \neq \emptyset$

$0 \in X(B)$ $G \rightarrow X$
 $g \mapsto g \cdot 0$

$G \twoheadrightarrow X$

$X \cong \frac{G}{\text{stab}_0}$

AS NECESS.
 CANON.

SI G CANON.

THM AF EST UNQ POUR X

PROVE

SOIT

$X \subset X$
 $\downarrow \downarrow \leftarrow \text{mono prop.}$
 B

on peut supposer que il $\exists$

$\theta(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R} \xrightarrow{\theta} X$
 $\searrow \downarrow$
 B

CLAIM $X(B) \neq \emptyset$

ON SUPPOSE LA C.A.M

$$\underline{LMR} \Rightarrow X \sim \frac{G}{H}$$

G EST H-TENSEUR ^{À GACHO} SUR B

T H-TENSEUR ^{À MONT} SUR B

IL SUFFIT DE SAVOIR QUE.

$TG \in A(AF)$

$${}^+G = G \begin{matrix} \nearrow T \\ \searrow T \end{matrix} \begin{matrix} \downarrow \\ \rightarrow B \end{matrix}$$

TG EST G
TENSEUR $\hat{A}$
SUR B .

PAR OBSERVATION : IL SUFFIT DE SAVOIR QUE

DONC IL SUFFIT DE SAVOIR QUE

$${}^+G(B) \neq \emptyset \text{ si } \exists B(R) \hookrightarrow {}^+G(B)$$

$$(CAN \Rightarrow {}^+G \geq G) \quad \nwarrow \begin{matrix} {}^+G(B) \\ \nearrow {}^+G(B) \end{matrix}$$

I.E. LE CQM

SCHUBERT'S HASSE PRINCIPLE:

$$\text{SI } \forall p \in B(\mathbb{R}) \text{ IL } \exists U_p \subseteq B(\mathbb{R})$$

QUEST OT SECTION ANALYTIQUE
ANALYTIQUE. $\sigma_p: U_p(\mathbb{R}) \rightarrow X_{U_p}(\mathbb{R})$ STEINBERG THROUN

ALMS $X(B) \neq \emptyset$.

$$\left(\begin{array}{l} X_{\mathbb{F}_p}(\mathbb{F}) \neq \emptyset \quad \forall p \in B(\mathbb{R}) \\ \text{"} \\ X(\mathbb{F}_p) \neq \emptyset \end{array} \right) \left(\begin{array}{l} \text{EX: SI} \\ B(\mathbb{R}) = \emptyset \\ \text{ALMS} \\ X(B) \neq \emptyset \end{array} \right)$$

DOUC IL SUFFIT DE CONSIDERER $\sigma_p: U_p(\mathbb{R}) \rightarrow X_{U_p}(\mathbb{R})$

$$p \in B(\mathbb{R}) \quad X(\mathbb{R}) \subseteq X(\mathbb{R})$$

$\nwarrow \quad \nearrow \quad \nwarrow \quad \nearrow$
 $B(\mathbb{R}) \quad \mathbb{R} \quad \mathbb{C} \quad \infty$

WILKINSON'S APPROXIMATION:

$$\forall p \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad p \in U_p \xrightarrow{\gamma} \mathcal{X}(\mathbb{R})$$

On peut l'approximer avec

FONCTIONS ANALYTIQUES on

IL FAUT SAVOIR PVO.

$\mathcal{X}(F_p)$ ENSEMBLE DES FONCTIONS
DES FONCTIONS ANALYTIQUES $U_p \rightarrow \mathcal{X}$

SI $\mathcal{X}(F_p) \neq \emptyset$ ALORS

IL EST DENSÉ DAN $\mathcal{X}$ POUR
LA TOPOLOGIE DE ZANUSKI

(THÉORÈME DE LA FONCTION
INDUCITE)

$$\mathcal{X}(F_p) \cap \mathcal{X}(IF_p) \neq \emptyset$$

∴

